平均費用規範最適小修理・取替え問題について(最適化理論とその関連分野)

AUTHOR(S):

瀬川, 良之; 大西, 匡光; 茨木, 俊秀

CITATION:

瀬川, 良之 ...[et al]. 平均費用規範最適小修理・取替え問題について(最適化理論とその関連分野). 数理解析研究所講究録 1991, 747: 93-99

ISSUE DATE:

1991-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/102243

数理解析研究所講究録
747巻 1991年 93-99

平均費用規範最適小修理・取替え問題について

京都大学　工学部　　瀬川良之（SEGAWA Yoshiyuki）
大西匡光（OHNISHI Masamitsu）
茨木俊秀（IBARAKI Toshihide）

1　はじめに

可能な保全活動として小修理と取替えを仮定した最適保全問題を議論する．目的は，無限期間における単位時間当りの取替え及び小修理費用を最小化する最適修理・取替え政策を求めることである．

小修理を考慮した保全問題は Barlw and Hunter[1] の研究に始まり，以来多くの研究が為されてきている．Tabata and Nishida[5] は期待総割引費用規範のもとで（ｔ，Ｔ）－政策の最適性を証明した．Phelps[3] は期待時間平均費用規範のもとで故障取替え費用と予防取替え費用が等しい場合についてｔ－政策の最適性を証明した．また，Ohnishi，Ibaraki and Mine[2] は期待時間平均費用規範のもとで（ｔ，Ｔ）－政策の最適性を証明した．

本報告では，期待時間平均費用の規範において，費用に関する合理的な仮定と故障時間分布がＩＦＲもしくはＤＦＲであるという仮定のもとで，（ｔ，Ｔ）－政策の最適性を証明する．

2　モデルと最適性方程式

取替えは，システムが故障したときにおいても稼動中においても行うことが出来る．故障時における取替えは故障取替えと呼ばれ，C_f の費用を要する．また，稼動時における取替えは予防取替えと呼ばれ，C_p の費用を要する．何れの取替えによってもシステムは新品になるものとする．

小修理は，システムが故障したときのみに行われ得て，C_m の費用を要する．ただし，小修理によりシステムの機能は快復するが年齢は変わらない．

保全としては取替えと小修理のみを仮定し，保全にかかる時間は無視できるもの

とする．

年齢とは，システムが新品の状態のときから稼動した総稼動時間のことである．特に，新品時には年齢 0 である．

システムの故障時間の分布関数を $\bar{F}(x)$,信頼度関数を $\bar{F}(x)=1-F(x)$とする．簡単のため $F(x)$ は密度関数を持つものとしてそれを $f(x)$ ，

また，故障率関数を $\lambda(x)=f(x)/\bar{F}(x)$ で表す．

上記のシステムに対して，無限期間における単位時間当りの保全費用を最小にするような小修理・取替え政策を求めることを問題とする．

以下の仮定を考える．

[Assumption Cost-1]

$$C_f>C_p>0,\ C_f>C_m>0,\ C_p+C_m>C_f \tag{2,1}$$

[Assumption Cost-2]

$$C_f>C_m>0,\ C_f=C_p \tag{2,2}$$

[Assumption IFR]

$\lambda(t)$ は非減少である．（ＩＦＲ）

[Assumption IFR-C]

$\lambda(t)$ は非減少かつ連続である．

[Assumption IFR-I]

$\lambda(t)$ は厳密に増加かつ連続であり t が無限大にゆくときの極限が無限大である．

[Assumption DFR]

$\lambda(t)$ は非増加である．（ＤＦＲ）

セミ・マルコフ決定過程においてよく知られているように，ある g と関数 $v(x)$ が存在して最適性方程式と呼ばれる

$$\begin{cases} 0=\inf\limits_{0<T\leqq\infty}\{\int_0^T f(s)v(s)ds+C_p\bar{F}(T)-g\int_0^T\bar{F}(s)ds\} & (2,3) \\ v(x)=\min\{\inf\limits_{x<T\leqq\infty}\{C_m+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^T f(s)v(s)ds+C_p\frac{\bar{F}(T)}{\bar{F}(x)} \\ \qquad -g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^T\bar{F}(s)ds\},\ C_f\} & (2,4) \end{cases}$$

を満足するならば，この最適性方程式から導出される政策が最適政策であり，g は最適な期待時間平均費用である．（例えば Ross[4]）

ここで，小修理・取替え政策のクラスを定義する．

厳密な（t，T）－政策とは，ある t,T（$0\leqq t<T<\infty$）に対して，年齢 [0,t) の間に故障が起こった場合には小修理を行い，もし年齢 [t,T) の間に故障が起こったならば故障取替えを行い，さもなければ年齢 T で予防取替えを行う政策である．

厳密なｔ－政策とは，ある t（$0\leqq t<\infty$）に対して，年齢 [0,t) に故障が起こった場合には小修理を行い，年齢 t 以後の最初の故障発生時に故障取替えを行うという政策である．

小修理のみの政策とは，故障が起こった場合には必ず小修理を行う政策である．

単に（t，T）－政策という場合は，厳密な（t，T）－政策，厳密なｔ－政策もしくは小修理のみの政策の何れかのことである．また，単にｔ－政策という場合は，厳密なｔ－政策もしくは小修理のみの政策のことである．

3　最適政策

次のような g，t，T に関する関係式の系を考える．

系 1

$$\begin{cases} g=C_m\lambda(\infty) & (3,1) \\ \lim\limits_{t\to\infty}\{C_m-C_f-C_m\int_0^t\lambda(s)ds+gt\}\leqq 0 & (3,2) \end{cases}$$

系２

$$\begin{cases} (C_f-C_p)\lambda(\infty) \leq g < C_m\lambda(\infty) & (3,3) \\ C_m-C_f-C_m\int_0^t\lambda(s)ds+gt=0 & (3,4) \\ C_m\bar{F}(t)-g\int_t^\infty\bar{F}(s)ds=0 & (3,5) \end{cases}$$

系３

$$\begin{cases} g=(C_f-C_p)\lambda(T) & (3,6) \\ C_m-C_f-C_m\int_0^t\lambda(s)ds+gt=0 & (3,7) \\ C_m\bar{F}(t)-(C_f-C_p)\bar{F}(T)-g\int_t^T\bar{F}(s)ds=0 & (3,8) \end{cases}$$

さらに $C_f=C_p$ の場合に対応して，次のような g，t に関する関係式の系を考える．

系１’

$$\begin{cases} g=C_m\lambda(\infty) & (3,9) \\ \lim_{t\to\infty}\{C_m-C_f-C_m\int_0^t\lambda(s)ds+gt\}\leq 0 & (3,10) \end{cases}$$

系２’

$$\begin{cases} 0\leq g<C_m\lambda(\infty) & (3,11) \\ C_m-C_f-C_m\int_0^t\lambda(s)ds+gt=0 & (3,12) \\ C_m\bar{F}(t)-g\int_t^\infty\bar{F}(s)ds=0 & (3,13) \end{cases}$$

[Lemma 1]

Assumptions Cost-1, IFR-C のもとで　系１　を満たす g と t が存在すれば，小修理のみの政策が最適である．

(Proof)

$$g=C_m\lambda(\infty) \qquad (3,14)$$

に対して

$$v(x)=C_m-C_m\int_0^x \lambda(s)ds+gx \qquad (3,15)$$

が最適性方程式を満たすことにより成り立つ． □

[Lemma 2]

Assumptions Cost-1, IFR-C のもとで 系２ を満たす g と t が存在すれば，厳密なｔ－政策が最適である．

(Proof)

系２ の解 g, t に対して

$$v(x)=\begin{cases} C_f+C_m\int_x^t \lambda(s)ds-g(t-x), & 0<x<t \qquad (3,16) \\ C_f, & t\leqq x<\infty \qquad (3,17) \end{cases}$$

が最適性方程式を満たすことにより成り立つ． □

[Lemma 3]

Assumptions Cost-1, IFR-C のもとで 系３ を満たす g, t, T が存在するれば，厳密な（ｔ，Ｔ）－政策が最適である．

(Proof)

系３ の解 g, t, T に対して

$$v(x)=\begin{cases} C_f+C_m\int_x^t \lambda(s)ds-g(t-x), & 0<x<t \qquad (3,18) \\ C_f, & t\leqq x\leqq T \qquad (3,19) \end{cases}$$

が最適性方程式を満たすことにより成り立つ． □

[Theorem 1]

Assumptions Cost-1, IFR-C のもとで（ｔ，Ｔ）－政策の中に最適政策が存在する．

(Proof)

系１，系２，系３ の何れか一つのみが必ず成り立つことから，
Lemmas 1, 2, 3 の結果を用いて題意が証明される． □

[Corollary 1]
Assumptions Cost-1, IFR-I のもとでは厳密な（ｔ，Ｔ）－政策が最適である．

これは Ohnishi, Ibaraki and Mine[2] の結果であるが，これは上記仮定のもとで 系３ を満たす g, t, T が必ず存在することから成り立つ．

[Corollary 2]
Assumptions Cost-2, IFR のもとではｔ－政策が最適である．

これは Phelps[3] の結果であるが，これは上記仮定のもとで 系１’もしくは 系２’がの何れか一方が必ず成立することから成り立つ．

[Theorem 2]
Assumptions Cost-1, DFR のもとでは小修理のみの政策が最適である．

(Proof)

$$g=C_m\lambda(\infty) \tag{3,20}$$

に対して

$$v(x)=C_m-C_m\int_0^x\lambda(s)ds+gx \tag{3,21}$$

が最適性方程式を満たすことにより成り立つ． □

4 終わりに

本報告では，故障時間の分布がＩＦＲもしくはＤＦＲである場合のみを扱った．故障時間の分布に関しては，ＩＦＲについてはＩＦＲＡ，ＮＢＵ，ＮＢＵＥといったより広いクラスがあり，ＤＦＲについてはＤＦＲＡ，ＮＷＵ，ＮＷＵＥといったより広いクラスがある．こうしたクラスの中で（ｔ，Ｔ）－政策やｔ－政策などの政策の最適性が示せるかは今後の課題である．

参考文献

[1] Barlow, R. E. and Hunter, L. C., "Optimal Preventive Maintenance Policies", Operations Reserch, Vol. 8, pp. 90-100,1960.

[2] Ohnishi, M., Ibaraki, T. and Mine H., "On the Optimality of (t,T)-Policy in the Minimal-Repair and Replacement Problem under the Average Cost Criterion", in Proceeding of International Symposium on Reliability and Maintainability 1990-Tokyo, pp. 329-334, 1990.

[3] Phelps, R. I., "Optimal Policy for Minimal Repair", Journal of the Operational Research Society, Vol. 34, pp.425-427, 1983.

[4] Ross, S. M., "Average Cost Semi-Marukov Decision Processes", Journal of Applied Probability, Vol. 7, pp. 649-656, 1970.

[5] Tahara, A. and Nishida, T., "Optimal Replacement Policy for Minimal Repair Model", Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.18, pp. 113-124, 1975.